EX 39 :

$n \in \mathbb{N}^*$ $\quad (E_n) : x^2 + x^3 = n$

1) on pose : $f_n(x) = x^2 + x^3 - n$

$f_n'(x) = 2x + 3x^2$

x	$-\infty$		$-2/3$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$	+		0	-	0	+	
$f_n(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{4}{27} - n$	↘	$-n$	↗	$+\infty$

* dans l'intervalle $]-\infty,0]$ f_n admet le réel $(\frac{4}{27} - n)$ comme maximum absolu

$\Rightarrow f_n(x) \leq \frac{4}{27} - n < 0 \quad \forall x \in]-\infty,0]$

d'où l'équation $f_n(x) = 0$ n'a pas de solutions dans $]-\infty,0]$

* f_n est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$

$\Rightarrow f_n([0,+\infty[) = [-n,+\infty[$

comme $0 \in [-n,+\infty[$

alors l'équation : $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n dans $[0,+\infty[$

conclusion : l'équation (E_n) admet a_n comme unique solution

2) a) Remarquons que : $a_n \geq 0 \ ; \forall n \in \mathbb{N}^*$

a_n est solution de (E_n)

a_{n+1} est solution de (E_{n+1})

d'où $a_{n+1}^2 + a_{n+1}^3 = n+1$

$a_n^2 + a_n^3 = n$

$\Rightarrow (a_{n+1}^2 - a_n^2) + (a_{n+1}^3 - a_n^3) = 1$

$\Rightarrow (a_{n+1} - a_n)\left[a_{n+1} + a_n + a_{n+1}^2 + a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2\right] = 1$

or a_n et a_{n+1} sont positifs d'où $a_{n+1} - a_n \geq 0$

$\Rightarrow a_{n+1} \geq a_n$ d'où (a_n) est croissante

b) supposons que (a_n) est majorée

comme (a_n) est croissante

alors (a_n) converge vers un réel ℓ

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} a_n^2 + a_n^3 = \ell^2 + \ell^3$

or $a_n^2 + a_n^3 = n$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} n = \ell^2 + \ell^3$ (absurde)

d'où (a_n) n'est pas majorée

c) (a_n) est croissante et non majorée

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

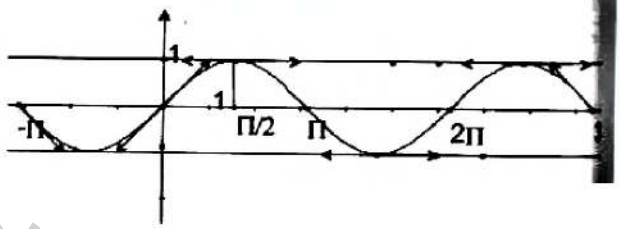
EX 40 :

I / f(x)=sinx f: impaire de période 2π

1) a) $f'(x) = \cos x$

$D_E = [0,\pi]$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f'(x)	2	+	0	-	0
f(x)	0	↗	1	↘	0



b) A(a,f(a)) B(b,f(b))

supposons que : a<b

le coeficient directeur de (AB) est $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$

d'après le théorème des accroissements finis :

il existe un réel $c \in]a,b[$ tq: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

or $f'(c) = \cos c \Rightarrow -1 \leq f'(c) \leq 1$

$\Rightarrow -1 \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq 1$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn